OS NÚMEROS DE FIBONACCI

MÁRCIO SANTANA DOS SANTOS DE JESUS

(R.A.:147180)

UNIVERSIDADE ESTADAUAL DE CAMPINAS (UNICAMP)

CAMPINAS, 2013

INDICAÇÃO

INTRODUÇÃO

O trabalho foi realizado com a ideia de mostrar a história da sequência de Fibonacci, desde o surgimento do problema de reprodução de coelhos, até a sua ligação com o número de ouro.

A dispensa de atenção pelo assunto instiga a vontade de ir mais além sobre o mesmo que se mostra tão interessante quanto qualquer outro trabalho matemático de grande porte, importância e presença hoje em dia. Procuramos centrar a pesquisa em algumas propriedades e curiosidades da sequência, principalmente nas que foram necessárias para desenvolver sua relação com o número de ouro.

Nas aplicações práticas, foram encontradas as mais diversas apresentações da sequência, mas foi mostrado a aplicação em áreas totalmente distintas como economia, física óptica e um simples desafio matemático, onde foi possível, além da apresentação visual, desenvolver algum raciocínio matemático na sua justificativa.

I Parte – A História

1.1. História de Leonardo Fibonacci

"O pensamento positivo pode vir naturalmente para alguns, mas também pode ser aprendido e cultivado, mude seus pensamentos e você mudará seu mundo."
Norman Vincent Peale

O seu nome completo é Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano e nasceu em Pisa na Toscânia (Itália) por volta de 1175, e ficou conhecido como Leonardo Fibonacci, devido ao fato de Fibonacci ser um diminutivo de fillius Bonacci, que queria dizer filho de Bonacci, e o nome de seu pai era, *Guilielmo Bonnacci*. Ocasionalmente, ele também assinava como Leonardo Bigollo (na Toscania, Bigollo significava viajante). No início do século XII, Pisa era um dos grandes centros comerciais italianos, tais como Gênova e Veneza, e tinha vários entrepostos comerciais espalhados pelos portos do Mediterrâneo.

O pai de Leonardo ocupou o lugar de chefe de um desses entrepostos, no norte da costa de África (Bugia, atualmente Bejaia na Argélia), foi lá que Leonardo iniciou os seus estudos de matemática com professores islâmicos.Viajou pelo Mediterrâneo (Egito, Síria, Grécia, Sicília, Provença), onde o sistema de numeração hindu era já largamente usado, encontrando-se com estudiosos islâmicos em cada um dos locais que visitava e adquirindo, assim, o conhecimento matemático do mundo árabe. Entrou em contato com os procedimentos matemáticos orientais, com os métodos algébricos árabes e os numerais indo-arábicos, conheceu a obra de al-Khwarismie assimilou numerosas informações aritméticas e algébricas.Em 1200 Leonardo regressa a Pisa e passa os 25 anos seguintes escrevendo trabalhos onde incorpora os conhecimentos que tinha adquirido com os árabes. O seu livro mais conhecido, um tratado de aritmética e álgebra elementar, Líber Abaci (Livro de cálculo) foi escrito em 1202. Em 1220 escreveu Pratica Geometriae e em 1225, Líber Quadratorume Flos.

II PARTE – PROPRIEDADES MATEMÁTICA E CURIOSIDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

2.1. Periodicidade da sequência de Fibonacci

"Tudo o que um sonho precisa para ser realizado é alguém que acredite que ele possa ser realizado."
Roberto Shinyashiki

Os números de Fibonacci se tornam grandes rapidamente, porque sempre se somam dois números sucessivos para formar o seguinte. Enquanto o 5º número de Fibonacci é 5, o 125º é 59.425.114.757.512.643.212.875.125, e é interessante notar que o dígito da unidade aparece com uma periodicidade de 60 (isto é, a cada 60 números o digito se repete). Por exemplo, o segundo número é 1, e o sexagésimo segundo é 4.052.739.537.881 (também terminado em 1), e o 122º número, 14.028.366.653.498.915.298.923. 761, também termina em 1; o mesmo vale para o 182º, e assim por diante. De mesmo modo, o 14º número é 377, e o 74º é 1.304.969.544.928.657, também termina com 7, e assim por diante. Esta propriedade foi descoberta em 1774 pelo matemático francês nascido da Itália Joseph Louis Lagrange (1736-1813), que é responsável por muitos trabalhos em Teoria dos Números e em Mecânica, e que também estudou a estabilidade do sistema solar.

Os últimos dois dígitos (por exemplo, 01, 01, 02, 03, 05, 08, 13, 21,...) se repetem na sequência com uma periodicidade de 300, e os três últimos dígitos com uma periodicidade 1.500. Em 1963, Stephen P. Geller usou um computador IBM 1620 para mostrar que os últimos 4 dígitos se repetem a cada 15.000 vezes, e os últimos 5, a cada 150.000 vezes, e finalmente, após o computador rodar por quase 3 horas, uma repetição dos últimos 6dígitos ocorreram no 1.500.000 números do Fibonacci.

Sabendo que um teorema geral referente à periodicidade dos últimos dígitos poderia ser provado, Geller comentou: "Não parece existir ainda um modo de adivinhar o período seguinte, mas talvez um novo programa para a máquina que permita a inicialização em qualquer ponto da sequência para um teste reduzirá o tempo de computação suficiente para que mais dados possam10ser coletados". Mas pouco tempo depois, o matemático israelense Dov Jarden mostrou que se pode provar rigorosamente que para qualquer número com últimos dígitos acima de três, a periodicidade é simplesmente: $15x10(n\ 1)$, onde n é o número dígitos que são repetidos. A demonstração da prova feita por Dov Jarden é muito extensa e não será apresentada nesse trabalho.

2.1. Divisores dos números de Fibonacci

Uma propriedade interessante dos números de Fibonacci é se adotarmos 2 índices n e m e esses 2 índices forem divisíveis entre si, o número de Fibonacci desses índices também serão divisíveis entre si.

Pondo isto em palavras nós temos:

Para i múltiplo de 3 o número de Fibonacci é um múltiplo de 2, isto é um múltiplo de F(3);

Para i múltiplo de 4 o número de Fibonacci é um múltiplo de 3, isto é um múltiplo de F(4);

Para i múltiplo de 5 o número de Fibonacci é um múltiplo de 5 isto é um múltiplo de F(5);

Para i múltiplo de 6 o número de Fibonacci é um múltiplo de 8 isto é um múltiplo de F(6);

E sugere a regra:

Cada número de Fibonacci do k é um múltiplo de F (k)

Ou, expressado matematicamente,

F(nk) é um múltiplo de F (k) para todos os valores para qualquer n, k >1

2.2. Soma dos números da sequência

A soma de todos os números de Fibonacci do primeiro ao enésimo é simplesmente igual ao (n+2)-ésimo número menos 1. Por exemplo, a soma dos 10 primeiros números, 1 + 1 +2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143, é igual ao décimo segundo número (144) menos 1. A soma dos primeiros 78 números de Fibonacci é igual ao 80º menos 1, e assim por diante.

$$\mathbf{F_1 = F_3 - F_2}$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

....

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Se somarmos todos os membros teremos:

$$F_3 - F_2 + F_4 - F_3 + F_5 - F_4 + \ldots\ldots + F_{n+1} - F_n + F_{n+2} - F_{n+1}$$

Cancelando todos os membros que se anulam teremos:

$$F_{n+2} - F_2$$

Sabendo que $F_2 = 1$ temos:

$$\mathbf{F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots\ldots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1\ .}$$

2.5. Soma dos números de Fibonacci de ordem ímpar

Agora seguindo a mesma ideia do item anterior, vamos somar somente os números de Fibonacci de ordem ímpar:

Sabemos que:

$F_2 = F_1 \Rightarrow F_1 = F_2$

$F_4 = F_3 + F_2 \Rightarrow F_3 = F_4 - F_2$

$F_6 = F_5 + F_4 \Rightarrow F_5 = F_6 - F_4$

… …

$F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2} \Rightarrow F2_{n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$

A soma dos números de Fibonacci de ordem ímpar é:

$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \ldots + F_{2n-1}$

Substituindo os números ímpares pelas igualdades acima teremos:

$F_2 + F_4 - F_2 + F_6 - F_4 + \ldots + F_{2n} - F_{2n-2}$

Cancelando todos os membros que se anulam teremos:

$$\mathbf{F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}}$$

2.6. Soma dos números de Fibonacci de ordem par

Como a soma de todos os números de Fibonacci até a ordem 2n é:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots\ldots + F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+2-1}$$

E a soma dos números de Fibonacci de ordem ímpar até 2n-1 é:

$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Então, subtraindo membro a membro as duas igualdades restarão somente à soma dos números de Fibonacci de ordem par no primeiro membro e no segundo membro:

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \ldots. + F_{2n} = F_{2n+2} - F_{2n-1}$$

Sabemos que:

$$F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n} \Rightarrow F_{2n+1} = F_{2n+2} - F_{2n}$$

Temos então:

$$\mathbf{F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \ldots. + F_{2n} = F_{2n+1} - 1}$$

2.7. Soma dos quadrados dos números de Fibonacci

Para definirmos a soma dos quadrados dos números de Fibonacci, primeiramente precisamos desenvolver um conceito, observando que para todo k natural, temos:

$$F_k \cdot F_{k+1} - F_k \cdot F_{k-1} = F_k (F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k.F_k = F_k^2$$

Assim temos:

$$F1^2 = F_1 F_2$$
$$F_2^2 = F_2 F_3 - F_2 F_1$$
$$F_3^2 = F3\ F4 - F3\ F_2$$
$$F_4^2 = F_4 F_5 - F_4 F_3$$
$$F_5^2 = F_5 F_6 - F_5 F_4$$
$$\ldots$$
$$F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$$

Partindo da soma dos quadrados:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + \ldots + F_n^2$$

E substituindo pelos valores obtidos acima, teremos:

$$F_1 F_2 + F_2 F_3 - F_2 F_1 + F_3 F_4 - F_3 F_2 + F_4 F_5 - F_4 F_3 + \ldots + F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$$

Cancelando todos os membros que se anulam teremos:

$$\mathbf{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}}$$

2.8. Fibonacci pitagórico

Os números de Fibonacci também estão relacionados às triplas pitagóricas. Esta última como pode recordar, são triplas de números que podem servir como comprimentos dos lados de um triângulo retângulo (como os números 3, 4 e 5). Tome quaisquer quatro números consecutivos de Fibonacci, como 1, 2, 3, 5. O produto dos números de fora, 1x5=5, duas vezes o produto dos números de dentro, 2 x 2 x 3 = 12, e a soma dos quadrados dos termos de dentro, 22 + 32 = 13, formam as 3 pernas da tripla pitagórica 5, 12, 13 (52 + 122 = 132). Mas isso não é tudo. Note que o terceiro número, 13 é ele próprio, um número de Fibonacci. Esta propriedade foi descoberta pelo matemático Charles Raine.

2.9. A fórmula de Binet

Em meados do século XIX, o matemático francês Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856) redescobriu uma fórmula que, aparentemente, era conhecida no século XVIII pelo matemático Leonard Euler (1707 -1783) e pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754). A fórmula permite que se encontre o valor de qualquer número de Fibonacci, *Fn,* se seu lugar na sequência, *n*, for conhecido.

Esta propriedade nos garante que para obter todas as soluções da equação recursiva de Fibonacci:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$$

Válida para todo inteiro n>1, basta obter quaisquer duas soluções não proporcionais, assim pela propriedade linear da multiplicação por escalar, podemos escolher uma sequência de Fibonacci cujo primeiro termo seja igual a 1.
Vamos considerar então a sequência W_n que seja uma progressão geométrica com $W_1=1$ e a razão não nula q, isto é:

$$W_n = q_{n-1}$$

Para que esta sequência seja de Fibonacci, devemos ter que:

$$W_{n-1} + W_n = W_{n+1}$$

Ou seja:

$$q_{n-2} + q_{n-1} = q_n$$

Que se reduz a:

$$1 + q = q^2$$

Resolvendo esta equação do segundo grau obtemos as duas raízes:

$$q_1 = (1+ \sqrt{5}) \div 2 \text{ e } q_2 = (1 - \sqrt{5}) \div 2$$

Observando que:

$$q_1 + q_2 = 1 \text{ e } q_1.q_2 = -1$$

Para cada raiz, obtemos uma sequência de Fibonacci, logo podemos construir $\{V_n\}$ e $\{W_n\}$ através de:

$$V_n = q_1^{n-1} \text{ e } W_n = q_2^{n-1}$$

E $\{U_n\}$ pode ser escrita como combinação linear de $\{V_n\}$ e $\{W_n\}$, isto é:

$$U_n = aV_{n+} bW_n = a[(1+\sqrt{5}) \div 2]^{n-1} + b[(1-\sqrt{5}) \div 2]^{n-1}$$

E esta é a forma mais geral possível para uma sequência de Fibonacci, logo se tomarmos em particular:

$$a+b = 1 \text{ e } aq_1 + bq_2 = 1$$

Teremos que:

$$a = (1+\sqrt{5}) \div 2\sqrt{5} \text{ e } b = (1-\sqrt{5}) \div 2\sqrt{5}$$

e substituindo na expressão de U_n, obtemos a Fórmula de Binet:

$$U_n = a[(1+\sqrt{5}) \div 2]^{n-1} + b[(1-\sqrt{5}) \div 2]^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_n = (1+\sqrt{5}) \div 2\sqrt{5}\ [(1+\sqrt{5}) \div 2]^{n-1+} (1-\sqrt{5}) \div 2\sqrt{5}\ [(1-\sqrt{5}) \div 2]^{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U_n = 1\div\sqrt{5}.(1+\sqrt{5}) \div 2.[2\div 1+\sqrt{5}].[1+\sqrt{5}\div 2]^n - 1\div\sqrt{5}.(1-\sqrt{5}) \div 2.[2\div 1-\sqrt{5}].[1-\sqrt{5}\div 2]^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_n = 1\div\sqrt{5}.[1+\sqrt{5}\div 2]^n - 1\div\sqrt{5}.[1-\sqrt{5}\div 2]^n$$

CQD

III PARTE – A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO

“Em minha rua há pessoas que caminham. Eu as ouço sussurrar pela noite quando adormeço embalada por uma cantiga sou de repente desperta por gritos, por apitos, passos que erram que vão e que vem depois o silêncio me faz frio em todo o coração.”

Edith Piaf – Dans ma rue (Em minha rua)

3.1. A história do número de ouro

Cercado de muitas lendas e controvérsias, o número de ouro é o número irracional mais misterioso e enigmático. Símbolo da proporcionalidade, ele aparece na natureza, nas grandes construções realizadas pelos homens, na música e na arte. O número de ouro é representado pela letra Φ, em homenagem a Fídias (Phideas), famoso escultor grego, por ter usado a proporção de ouro em muitos dos seus trabalhos. A divisão de um segmento feita segundo essa proporção denomina-se divisão áurea, a que Euclides chamou divisão em média e extrema razão, também conhecida por secção divina pelo matemático Luca Pacioli ou secção áurea segundo Leonardo da Vinci.

A contribuição de Fibonacci para o número de ouro está relacionada com a solução do seu problema dos coelhos publicado no seu livro Liber Abaci, a seqüência de número de Fibonacci. É que as sucessivas razões entre um número e o que o antecede vão-se aproximando do número de ouro. Outro matemático que contribuiu para o estudo e divulgação do número de ouro foi Pacioli. Publicou em 1509 uma edição que teve pouco sucesso, com o título De Divina Proportione. Este trabalho dizia respeito a polígonos regulares e sólidos e a razão de ouro. Uma contribuição que não pode ser deixada de referir foi à contribuição de Leonardo Da Vinci (1452-1519). A excelência dos seus desenhos revela os seus conhecimentos matemáticos bem como a utilização da razão áurea como garante de uma perfeição, beleza e harmonia únicas.

É lembrado como matemático apesar da sua mente irrequieta não se concentrar na aritmética, álgebra ou geometria o tempo suficiente para fazer uma contribuição 24 significativa. Representa bem o homem tipo da renascença que fazia de tudo um pouco sem se fixar em nada. Leonardo era um gênio de pensamento original que usou exaustivamente os seus conhecimentos de matemática, nomeadamente o número de ouro, nas suas obras de arte. Um exemplo é a tradicional representação do homem em forma de estrela de cinco pontas de Leonardo, que foi baseada nos pentágonos, estrelado e regular, inscritos na circunferência.

3.2. Seção Áurea

Também chamada de proporção áurea, foi estudada pelos gregos antes do tempo de Euclides de Alexandria que descreveu esta seção em sua proposição "dividir um segmento de reta em média e extrema razão". Diz-se que o ponto C divide o segmento AB em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo, isto é, AB/BC = BC/AC. Usando a notação moderna, podemos escrever esta relação assim:

$$a \div x = x \div (a-x)$$

Para resolvermos a equação da Seção Áurea basta determinar a equação dada por sua proporcionalidade e gozar da fórmula de Bhaskara para a resolução descartando, claro, a raiz negativa e obtendo o *fi* ou às vezes denominado o *tau*.

3.3. A sequência de Fibonacci e o número de ouro

Para mostrar a relação da sequência de Fibonacci e o número de ouro, vamos partir que a sequência é dada por:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...

Vamos tomar a definição desta sequência para todo n natural, como:

$$F(1)= 1 , F(2)=1$$
$$F_{n+1}= F_{n-1} + F_n$$

Esta sequência não é limitada superiormente, mas existe um fato interessante: Tomando as razões (divisões) de cada termo pelo seu antecessor, obtemos outra sequência numérica cujo termo geral é dado por:

$$U(n) = F(n+1) \div F(n)$$

que é uma seqüência limitada. (Se considerarmos a seqüência de Fibonacci como um conjunto da forma {1,1,2,3,5,8,13,...) e a divisão de cada número pelo seu antecessor, obteremos outra seqüência}:

1÷1=1; 2÷1=2; 3÷2=1,5; 5÷3=1,66...;8÷5=1,6; 13÷8=1,625; 21÷13=1,615; 34÷21=1,619;...

As razões vão se aproximando do Número de Ouro (Número Áureo). Quando n tende a infinito, o limite é exatamente Phi, o número de ouro.

4. Encerramento
Considerações finais

As impressões sobre as pequenas coisas mudam a partir de uma nova visão, abrangente e descomunal. A sequência de Fibonacci serviu e serve para expandir o olhar sobre as coisas, uma visão fora das dimensões já vividas corriqueiramente. É um trabalho duro e exige certa interpretação muito mais minuciosa do que para se enxergar o que está à palma.

A compreensão é disforme, instigante, que expira prazer no momento em que se lê e, sobretudo, faz compreender o que está por passar diante de tamanha quantia de conhecimento. Fibonacci é a prova indubitável de que a persistência num trabalho em que se queira chegar a algum propósito exige um comportamento regrado e postura disciplinar, entende-se que a proposta dessa monografia fora justamente o questionamento sobre a postura que é tomada para chegar aos grandes êxitos. Não obstante, a sequência de Fibonacci é um trabalho cuja persistência e a disciplina são causas desse fim esplêndido.

Portanto, o ensaio sobre a introdução a teoria dos números e em sua própria complexidade nos esclarece o que está por trás das formas, dos símbolos e, sobretudo, da vida.

Ao Fernando Torres, uma monografia transcrita através da pesquisa, leitura e interpretação. A este mesmo que propôs uma dinâmica entre o novo e o velho, de forma a esclarecer as ideias já passadas desde há muito no colégio. Obrigado.

Bibliografia

- HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção - Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. 178p;
- LOPES, Luís. **Manual de Progressões**, Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1998. 126p;
- ÁVILA, Geraldo. **Retângulo Áureo, Divisão Áurea e Seqüência de Fibonacci.** Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 06, pág. 09-14, 1985;
- http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/fibonacci.html
- http://pascal.iseg.utl.pt/~ncrato/Expresso/FiFibonacci_Expresso_20041009.htm
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/