UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

OS NÚMEROS DE FIBONACCI

Disciplina: MA148
Fundamentos da Matemática

Professor responsável: Fernando Eduardo Torres Orihuel

Aluno: Daniel Souza da Mata RA: 150598

Sumário

Introdução

O trabalho tem como objetivo expor um pouco da história de Leandro Fibonacci e como ele descobriu a sequência, mostrar sua relação com o número de ouro, Triângulo de Pascal e outras curiosidades relacionadas aos números de Fibonacci.
A sequência de Fibonacci é conhecida, pois tem em si o número de ouro, muito famoso também por ser uma constante presente em vários seres da natureza, tal sequência foi descoberta num problema clássico, o problema dos coelhos.

Historia

Leonardo de Pisa ou Fibonacci nasceu em Pisa na tália. Seu pai era um comerciante e tinha negócios no norte da África. Assim Leonardo estudou com um professor muçulmano e viajou pelo Egito, Síria e Grécia, onde entrou em contato com os procedimentos matemáticos orientais, com os métodos algébricos árabes e os numerais indo-arábicos. Ao retornar a sua terra natal, publicou sua obra mais famosa intitulada Liber abaci (ou livro do Abaco). Não é um livro apenas sobre o ábaco, é um tratado muito completo sobre os métodos e problemas algébricos em que o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.

O Livro Ábaco

O Livro do Ábaco foi uma das obras de Fibonacci em 1202, e foi baseado na aritmética e Álgebra que Fibonacci aprendeu durante as suas viagens pelo Mediterrâneo. Em 1228 o livro foi de novo publicado após uma revisão.
Foi muitas vezes imitado, ou mesmo copiado, servindo de modelo a praticamente todas as aritméticas comercias da época medieval e renascentista. Foi um dos primeiros a introduzir os numerais indo-árabes na Europa. O livro tem uma forte influência árabe, contém não apenas as regras para cálculo com os numerais indo-árabes, mas também diversos problemas, que incluem questões, certamente muito úteis aos mercadores, como o cálculo de juros, conversões monetárias, medidas, e outros tipos de problemas que Fibonacci resolve recorrendo a diversos algoritmos e métodos, entre eles o método da falsa posição e a resolução de equações quadráticas.

Reprodução de coelhos

Um dos problemas que está no livro Ábaco é o Problema dos pares de coelhos: Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano? Um homem tem um par de coelhos em um ambiente inteiramente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a produção de um par e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida.

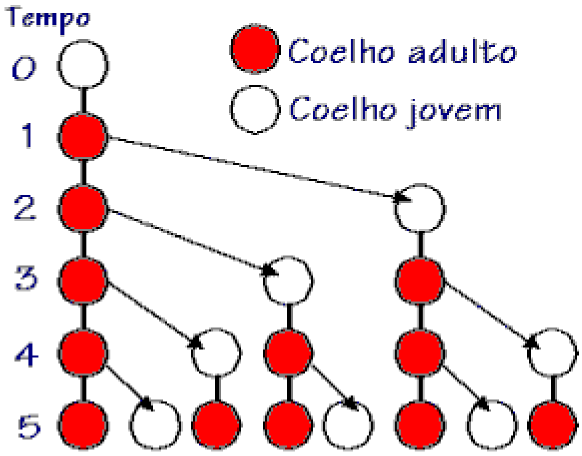


Fig.1 Reprodução de coelho

Como o par adulto produz um par novo a cada 30 dias, no início do segundo mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par de adultos e outro de coelhos jovens, assim no início do mês 1 existirão 2 pares: 1 par adulto + 1 par recém nascido.
No início do 3º. mês o par adulto produzirá de novo mais um par enquanto que o par jovem terá completado 1 mês de vida e ainda não estará apto a produzir, assim no início do terceiro mês existirão três pares de coelhos, sendo: 1 par adulto + 1 par com 1 mês de idade + 1 par recém nascido.

No início do 4º. mês, existirão dois pares adultos sendo que cada um já produziu um novo par e um par novo que completou 1 mês, logo teremos 5 pares: 2 pares adultos + 1 par com 1 mês + 2 pares recém nascidos.

No início do 5º. mês, existirão três pares adultos sendo que cada um já produziu um novo par e dois pares novos que completaram 1 mês de vida, assim teremos 8 pares: 3 pares adultos + 2 pares(1 mês) + 3 pares recém nascidos.

No início do 6º. mês, existirão cinco pares adultos sendo que cada um já produziu um novo par e três pares novos que completaram 1 mês, assim existirão 13 pares: 5 pares adultos + 3 par com 1 mês + 5 pares recém nascidos.

Tal processo continua através dos diversos meses até completar um ano. Observa-se esta formação no gráfico com círculos, mas também pode-se perceber que a sequência numérica, conhecida como a sequência de Fibonacci, indica o número de pares ao final de cada mês:

{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...}

Esta sequência de números tem uma característica especial denominada recursividade:

1o.termo somado com o 2o.termo gera o 3o.termo **2o.termo somado com o 3o.termo gera o 4o.termo** **3o.termo somado com o 4o.termo gera o 5o.termo**

E assim continua...

Denotando a sequência por u=u(n) como o número de pares de coelhos ao final do mês n, poderemos escrever:

u(1) + u(2) = u(3) u(2) + u(3) = u(4) u(3) + u(4) = u(5) u(4) + u(5) = u(6)

E assim por diante...

Cada termo pode ser obtido em função dos termos anteriores. No final do mês 12, o número de pares de coelhos deverá ser 144.

Em geral, temos:

u(n+1) = u(n-1) + u(n)

Retângulo Áureo e o Nautilus

Anexando dois quadrados com lado=1, teremos um retângulo 2x1, sendo o lado maior igual à soma dos lados dos quadrados anteriores. Anexamos agora outro quadrado com lado=2 (o maior lado do retângulo 2x1) e teremos um retângulo 3x2. Continuamos a anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos no passo anterior. A sequência dos lados dos próximos quadrados é: 3,5,8,13,... que é a sequência de Fibonacci.

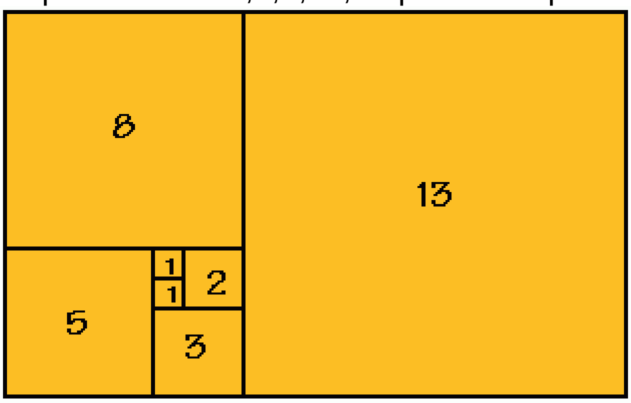


Fig.2 Retângulos Áureo

Usando um compasso, trace um quarto de círculo no quadrado de lado L=13, de acordo com o desenho ao lado. De acordo com o desenho ao lado, trace quartos de círculos nos quadrados de lado L=8, L=5, L=3, L=2, L=1 e L=1.

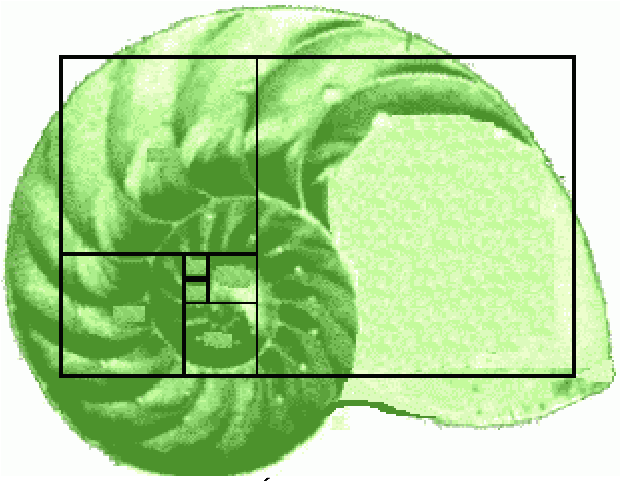
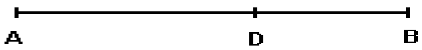


Fig.3 Retângulos Áureo e Nautilus marinho

Segmento Áureo

Quando temos um segmento de reta com extremidades A e B, podemos determinar um ponto D neste segmento, dividindo-o em média e extrema razão.

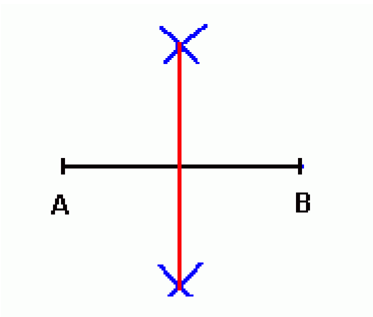


Isto significa que é possível obter um ponto D e permite obter um segmento áureo neste segmento AB. O objetivo é encontrar um ponto D entre A e B tal que a razão entre o segmento AB e o segmento AD seja =(1,61803...).

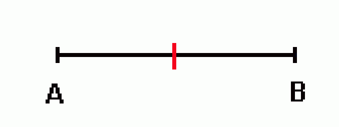
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Isto significa que o maior segmento AD é 1,61803... vezes a medida do menor segmento DB.

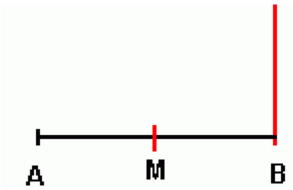
Obteremos o ponto médio do segmento AB. Coloque a ponta seca do compasso em um extremo, abra-o até o outro extremo e trace um arco para cima e para baixo do segmento de reta AB. Repita este procedimento com o outro extremo da reta, sem alterar a abertura do compasso. Os pontos onde os arcos se cruzam devem ser unidos por um segmento de reta (em vermelho) e o ponto onde este segmento cruza o primeiro segmento AB, é o ponto médio de AB;



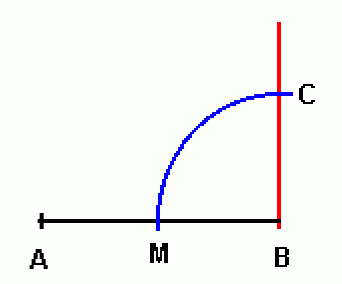
Agora traçaremos uma reta perpendicular a AB passando por B com a metade do comprimento de AB;



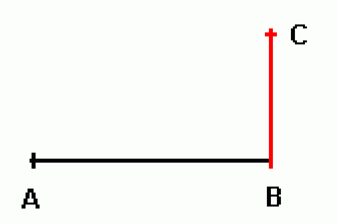
Primeiro trace a reta perpendicular a AB usando um jogo de esquadros;



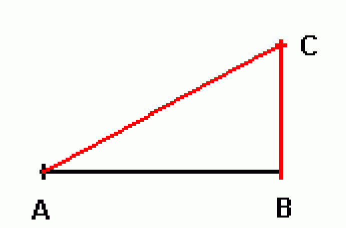
Com a ponta seca do compasso em B, abra-o até o ponto médio M e trace um arco até que este cruze a reta perpendicular a AB;



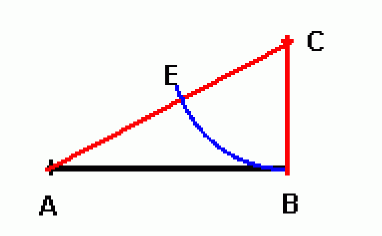
Temos agora uma nova reta BC perpendicular a AB com exatamente a metade do comprimento de AB;



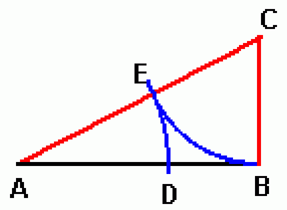
Una este ponto que acabou de encontrar com o ponto A da primeira reta para formar um triângulo ABC;



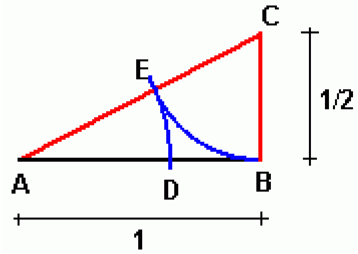
Coloque a ponta seca do compasso no vértice C do triângulo e abra-o até o ponto B. Use este raio para marcar o ponto E na hipotenusa do triângulo;



Finalmente, com a ponta seca do compasso no vértice A, abra-o até o novo ponto E marcado na hipotenusa, e use este raio para marcar o ponto D na primeira reta AB. Este ponto é o ponto que divide o segmento AB em duas partes, onde o maior segmento é 1,6183....vezes o menor.



Obtivemos assim o ponto D que estávamos procurando.



Como podemos justificar este procedimento do ponto de vista matemático? Se o lado AB do triângulo mede 1 unidade de comprimento, então o lado BC mede a metade e obtemos a medida da hipotenusa com o teorema de Pitágoras.

AC2=AB2+BC2=1+1/4=5/4

Usando R[5] como a raiz quadrada de 5, podemos escrever que

AC = R[5]/2

O ponto E na hipotenusa é marcado de forma que CE tenha o mesmo comprimento que o lado CB, isto é 1/2, então;

AE=(R[5] - 1)/2

O ponto D é marcado a mesma distância de A, assim

AD = AE = ½(R[5] -1)

Temos então a proporção:

$$\frac{AB}{AD} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

O número de ouro e sequência de Fibonacci

De que forma ocorre esta conexão com a razão de ouro Phi? Na verdade a sequência de Fibonacci é dada por:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

e os termos desta sequência são denominados números de Fibonacci. Pode-se tomar a definição desta sequência para todo n natural, como:

$$u(1)=1, \quad u(2)=1$$
$$u(n+1) = u(n-1) + u(n)$$

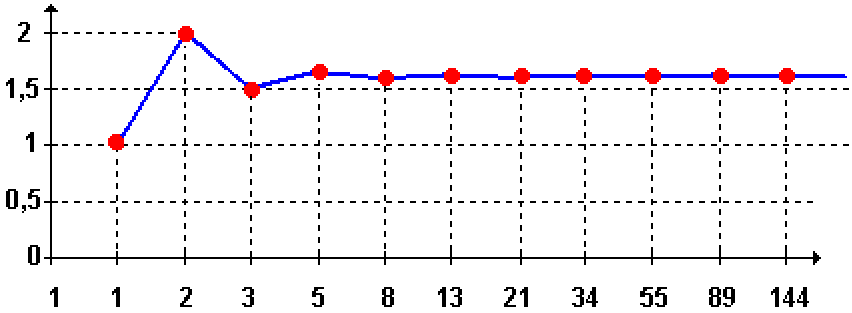
Esta sequência não é limitada superiormente, mas existe um fato interessante: Tomando as razões (divisões) de cada termo pelo seu antecessor, obtemos uma outra sequência numérica cujo termo geral é dado por:

$$f(n)= \frac{u(n+1)}{u(n)}$$

que é uma sequência limitada. Se considerarmos a sequência de Fibonacci como um conjunto da forma {1,1,2,3,5,8,13,...) e a divisão de cada número pelo seu antecessor, obteremos outra sequência:

1/1=1, 2/1=2, 3/2=1.5, 5/3=1.666..., 8/5=1.6, ...

É fácil perceber o que ocorre quando colocamos estas razões sucessivas (alturas) em um gráfico em que o eixo horizontal indica os elementos da sequência de Fibonacci:



As razões vão se aproximando de um valor particular, conhecido como Número de Ouro (Número Áureo), que é frequentemente representado pela letra grega Phi

Quando n tende a infinito, o limite é exatamente Phi, o número de ouro.

$$\text{Phi } \phi = \text{Lim } \frac{u(n+1)}{u(n)} = 1.618033988749895$$

Existem muitas sequências com as mesmas propriedades que a sequência de Fibonacci.

Exemplos:

A sequência abaixo indicada com a letra L recebe o nome de sequência de Lucas.

L = {1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...}

A = {5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, ...}

B = {-8, -4, -12, -16, -28, -44, ...}

Podemos construir uma sequência de Fibonacci z=z(n) muito geral, onde z(1)=a, z(2)=b e tomar para todo n natural:

$$z(n+1) = z(n-1) + z(n)$$

Obteremos então:

$$a,\ b,\ a+b,\ a+2b,\ 2a+3b,\ 3a+5b,\ 5a+8b,\ 8a+13b,\ \ldots$$

Fica fácil observar que

$$z(n) = a\ u(n-2) + b\ u(n-1)$$

onde u=u(n) é a sequência normal de Fibonacci.

As diferenças entre elas estão relacionadas com a questão da convergência das razões de seus termos gerais pelos respectivos antecedentes, mas o valor Phi é exatamente o mesmo em qualquer caso.

Os números 89 e o 1/89

A Seqüência de Fibonacci contém um número relacionado com os demais, o décimo primeiro número, 89. O valor de 1/89 na representação decimal é igual a 0,01123595... Suponhamos que organizamos os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... como frações decimais da seguinte maneira:

0,01
0,001
0,0002
0,00003
0,000005
0,0000008
0,00000013
0,000000021
....

O dígito das unidades do primeiro número de Fibonacci esta na segunda casa decimal, e do segundo está na terceira casa decimal, e assim por diante (o dígito das unidades do n-ésimo número de Fibonacci esta na (n+1)-ésima casa decimal).
Agora se somarmos todos os números, iremos obter 0,01123595 ... que é igual a 1/89.
Essa curiosidade foi descoberta por Cody Birsner, um estudante na universidade de Oklahoma, em 1994.

Triângulo de Pascal

Se n!=fatorial(n), denotamos por Cm,n a combinação de m elementos com a taxa n (tomados n a n), como:

$$\text{Cm,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

O triângulo de Pascal pode ser obtido numericamente, somando-se dois números consecutivos da mesma linha com o resultado posto em baixo do segundo somando ou através das combinações que aparecem na tabela abaixo:

$1=C_{00}$						
$1=C_{10}$	$1=C_{11}$					
$1=C_{20}$	$2=C_{21}$	$1=C_{22}$		$13=u_7$		
$1=C_{30}$	$3=C_{31}$	$3=C_{32}$	$1=C_{33}$			
$1=C_{40}$	$4=C_{41}$	$6=C_{42}$	$4=C_{43}$	$1=C_{44}$		
$1=C_{50}$	$5=C_{51}$	$10=C_{52}$	$10=C_{53}$	$10=C_{54}$	$1=C_{55}$	
$1=C_{60}$	$6=C_{61}$	$15=C_{62}$	$20=C_{63}$	$15=C_{64}$	$6=C_{65}$	$1=C_{66}$

A altura da combinação Cm,n é a soma dos índices que aparecem na combinação, isto é:

$$\text{altura(Cm,n)} = m+n$$

Por exemplo, as alturas das combinações C6,0, C5,1, C4,2, C3,3 são todas iguais a 6 e observamos que o 7o. termo da sequência de Fibonacci é dado por:

$$u(7) = C6,0 + C5,1 + C4,2 + C3,3$$

Esta propriedade relaciona o triângulo de Pascal com os números de Fibonacci, mostrando que a soma de todas as combinações Cm,n que aparecem no triângulo de Pascal, com uma mesma altura p de tal modo que p=m+n e m>n, coincide com o termo de ordem p+1 da sequência de Fibonacci, isto é:

$$u(p+1) = Cp,0 + Cp\text{-}1,1 + Cp\text{-}2,2 + Cp\text{-}3,3 + \ldots + Cp\text{-}n,n$$

sendo que p deve ser maior ou igual que 2n.

Referencias Bibliografia

http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/fibonacci.html
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib1.htm
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm
http://drikamath.files.wordpress.com/2012/03/tc-sequc3aanciadefibonacci.pdf